Structures algébriques
13 décembre 2007

Examen 2

1. (15 points) Calculer le polynôme cyclotomique $\Phi_{12}(x)$.

2. (30 points) Soit $\mathbf{Z}[i]$ l'anneau des entiers de Gauss.

   (a) Vérifier que $I := \{a + ib \in \mathbf{Z}[i] : 5|(2b + a)\}$ est un idéal de $\mathbf{Z}[i]$.

   (b) En citant des résultats du cours, montrer que I est principal.

   (c) Trouver un élément $z \in \mathbf{Z}[i]$ tel que $I = z\mathbf{Z}[i]$.

3. (30 points)

   (a) Soient A_1 et A_2 des anneaux, et $\varphi \colon A_1 \to A_2$ un homomorphisme d'anneaux. Vérifier que la fonction $\Phi \colon A_1[x] \to A_2[x]$ définie par

   $$\Phi(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) = \varphi(a_n)x^n + \varphi(a_{n-1})x^{n-1} + \ldots + \varphi(a_1)x + \varphi(a_0)$$

   est un homomorphisme d'anneaux.

   (b) Soit maintenant $f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients entiers de degré $n \geq 2$, et p un nombre premier tel que p ne divise pas a_n. Montrer que si f est irréductible lorsque vu comme élément de $\mathbf{F}_p[x] = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})[x]$, alors f n'admet pas de factorisation $f = gh$ avec $\deg g \geq 1$ et $\deg h \geq 1$ dans $\mathbf{Z}[x]$.

   (c) En appliquant le critère précédent avec un p bien choisi, montrer que le polynôme $7x^3 - 6x^2 + 3x + 9$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[x]$.

4. (25 points) Soit $f = x^3 + 2x + 1 \in \mathbf{F}_3[x]$, où $\mathbf{F}_3 = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Désignons par $\langle f \rangle$ l'idéal de $\mathbf{F}_3[x]$ engendré par f.

   (a) Montrer que $\mathbf{F}_3[x]/\langle f \rangle$ est un corps.

   (b) Soit $\alpha = [x] \in \mathbf{F}_3[x]/\langle f \rangle$. Trouver un polynôme $g \in \mathbf{F}_3[x]$ tel que $\beta := [g] \in \mathbf{F}_3[x]/\langle f \rangle$ satisfait $\alpha\beta = 1$.